Recapitulation: Track Extraction: Initiation of the PDF Iteration

***extraction of target tracks*: detection on a higher level of abstraction**

start: data sets $Z_k = \{\mathbf{z}_k^j\}_{j=1}^{m_k}$ (sensor performance: P_D, ρ_F, $\mathbf{R}$)

goal: Detect a target trajectory in a time series: $\mathcal{Z}^k = \{Z_i\}_{i=1}^k$!

at first simplifying assumptions:

- The targets in the sensors' field of view (FoV) are well-separated.
- The sensor data in the FoV in scan i are produced simultaneously.

decision between two competing hypotheses:

h_1: Besides false returns $\mathcal{Z}^k$ contains also target measurements.

h_0: There is no target existing in the FoV; all data in $\mathcal{Z}^k$ are false.

statistical decision errors:

$P_1 = \text{Prob}(\textit{accept}\ h_1|h_1)$ analogous to the sensors' P_D

$P_0 = \text{Prob}(\textit{accept}\ h_1|h_0)$ analogous to the sensors' P_F

Fraunhofer FKIE

Practical Approach: Sequential Likelihood Ratio Test

Goal: Decide as fast as possible for given decision errors P_0, P_1!

Consider the ratio of the conditional probabilities $p(h_1|\mathcal{Z}^k)$, $p(h_0|\mathcal{Z}^k)$ and the likelihood ratio $\mathrm{LR}(k) = p(\mathcal{Z}^k|h_1)/p(\mathcal{Z}^k|h_0)$ as an intuitive decision function:

$$\frac{p(h_1|\mathcal{Z}^k)}{p(h_0|\mathcal{Z}^k)} = \frac{p(\mathcal{Z}^k|h_1)}{p(\mathcal{Z}^k|h_0)} \frac{p(h_1)}{p(h_0)} \qquad \text{a priori: } p(h_1) = p(h_0)$$

Starting from a time window with length $k = 1$, calculate the test function $\mathrm{LR}(k)$ successively and compare it with *two* thresholds A, B:

If	$\mathrm{LR}(k) < A$,	accept hypothesis h_0 (i.e. no target is existing)!
If	$\mathrm{LR}(k) > B$,	accept hypothesis h_1 (i.e. target exists in FoV)!
If	$A < \mathrm{LR}(k) < B$,	wait for new data Z_{k+1}, repeat with $\mathrm{LR}(k+1)$!

Fraunhofer FKIE

Iterative Calculation of the Likelihood Ratio

$$\mathsf{LR}(k) = \frac{p(\mathcal{Z}^k|h_1)}{p(\mathcal{Z}^k|h_0)} = \frac{\int d\mathbf{x}_k \, p(Z_k, m_k, \mathbf{x}_k, \mathcal{Z}^{k-1}|h_1)}{p(Z_k, m_k, \mathcal{Z}^{k-1}|h_0)} = \frac{\int d\mathbf{x}_k \, p(Z_k, m_k|\mathbf{x}_k) \, p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}^{k-1}, h_1) \, p(\mathcal{Z}^{k-1}|h_1)}{|\mathsf{FoV}|^{-m_k} \, p_F(m_k) \, p(\mathcal{Z}^{k-1}|h_0)}$$

$$= \frac{\int d\mathbf{x}_k \, p(Z_k, m_k|\mathbf{x}_k, h_1) \, p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}^{k-1}, h_1)}{|\mathsf{FoV}|^{-m_k} \, p_F(m_k)} \, \mathsf{LR}(k-1)$$

basic idea: iterative calculation!

Let $H_k = \{E_k, H_{k-1}\}$ be an interpretation history of the time series $\mathcal{Z}^k = \{Z_k, \mathcal{Z}^{k-1}\}$.

$E_k = E_k^0$: target was not detected, $E_k = E_k^j$: $\mathbf{z}_k^j \in Z_k$ is a target measurement.

$$p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}^{k-1}, h_1) = \sum_{H_{k-1}} p(\mathbf{x}_k|H_{k-1}\mathcal{Z}^{k-1}, h_1) \, p(H_{k-1}|\mathcal{Z}^{k-1}, h_1)$$

The standard MHT prediction!

$$p(Z_k, m_k|\mathbf{x}_k, h_1, h_1) = \sum_{E_k} p(Z_k, E_k|\mathbf{x}_k, h_1)$$

The standard MHT likelihood function!

The calculation of the likelihood ratio is just *a by-product of Bayesian MHT tracking*.

Iteration Formula for $\mathsf{LR}(k) = p(\mathcal{Z}^k|h_1)/p(\mathcal{Z}^k|h_0)$

initiation: $k = 0, \quad \mathbf{j}_0 = 0, \quad \lambda_{\mathbf{j}_0} = 1$

recursion: $\mathsf{LR}(k+1) = \sum_{\mathbf{j}_{k+1}} \lambda_{\mathbf{j}_{k+1}} = \sum_{j_{k+1}=0}^{m_{k+1}} \sum_{\mathbf{j}_k} \lambda_{j_{k+1}\mathbf{j}_k} \lambda_{\mathbf{j}_k}$

with: $\lambda_{j_{k+1}\mathbf{j}_k} = \begin{cases} 1 - P_D & \text{for} \quad j_{k+1} = 0 \\ \frac{P_D}{\rho_F} \mathcal{N}(\boldsymbol{\nu}_{j_{k+1}\mathbf{j}_k}, \mathbf{S}_{j_{k+1}\mathbf{j}_k}) & \text{for} \quad j_{k+1} \neq 0 \end{cases}$

convenient notation: with $\mathbf{j}_k = (j_k, \ldots, j_1)$ let $\sum_{\mathbf{j}_k} \lambda_{\mathbf{j}_k} = \sum_{j_k=0}^{m_k} \cdots \sum_{j_1=0}^{m_1} \lambda_{j_k \ldots j_1}$

Iteration Formula for $\mathsf{LR}(k) = p(\mathcal{Z}^k|h_1)/p(\mathcal{Z}^k|h_0)$

initiation: $k = 0, \quad \mathbf{j}_0 = 0, \quad \lambda_{\mathbf{j}_0} = 1$

recursion: $$\mathsf{LR}(k+1) = \sum_{\mathbf{j}_{k+1}} \lambda_{\mathbf{j}_{k+1}} = \sum_{j_{k+1}=0}^{m_{k+1}} \sum_{\mathbf{j}_k} \lambda_{j_{k+1}\mathbf{j}_k} \lambda_{\mathbf{j}_k}$$

with: $$\lambda_{j_{k+1}\mathbf{j}_k} = \begin{cases} 1 - P_D & \text{for} \quad j_{k+1} = 0 \\ \frac{P_D}{\rho_F} \mathcal{N}(\boldsymbol{\nu}_{j_{k+1}\mathbf{j}_k}, \mathbf{S}_{j_{k+1}\mathbf{j}_k}) & \text{for} \quad j_{k+1} \neq 0 \end{cases}$$

innovation: $\boldsymbol{\nu}_{j_{k+1}\mathbf{j}_k} = \mathbf{z}_{j_{k+1}} - \mathbf{H}_{j_{k+1}} \mathbf{x}_{\mathbf{j}_{k+1|k}}$

innov. cov.: $\mathbf{S}_{j_{k+1}\mathbf{j}_k} = \mathbf{H}_{j_{k+1}} \mathbf{P}_{\mathbf{j}_{k+1|k}} \mathbf{H}_{j_{k+1}}^\top + \mathbf{R}_{j_{k+1}}$

state update: $\mathbf{x}_{\mathbf{j}_{k+1|k}} = \mathbf{F}_{j_{k+1}} \mathbf{x}_{\mathbf{j}_k}$ $\qquad \mathbf{x}_{\mathbf{j}_k} = \mathbf{x}_{\mathbf{j}_{k|k-1}} + \mathbf{W}_{j_k\mathbf{j}_{k-1}} \boldsymbol{\nu}_{j_k,\mathbf{j}_{k-1}}$

covariances: $\mathbf{P}_{\mathbf{j}_{k+1|k}} = \mathbf{F}_{j_{k+1}} \mathbf{P}_{\mathbf{j}_k} \mathbf{F}_{j_{k+1}}^\top + \mathbf{D}_{j_{k+1}}$ $\qquad \mathbf{P}_{\mathbf{j}_k} = \mathbf{P}_{\mathbf{j}_{k|k-1}} - \mathbf{W}_{j_k\mathbf{j}_{k-1}} \mathbf{S}_{j_k\mathbf{j}_{k-1}} \mathbf{W}_{j_k\mathbf{j}_{k-1}}^\top$

Iteration Formula for $\mathsf{LR}(k) = p(\mathcal{Z}^k|h_1)/p(\mathcal{Z}^k|h_0)$

initiation: $k = 0, \quad \mathrm{j}_0 = 0, \quad \lambda_{\mathrm{j}_0} = 1$

recursion: $$\mathsf{LR}(k+1) = \sum_{\mathrm{j}_{k+1}} \lambda_{\mathrm{j}_{k+1}} = \sum_{j_{k+1}=0}^{m_{k+1}} \sum_{\mathrm{j}_k} \lambda_{j_{k+1}\mathrm{j}_k} \lambda_{\mathrm{j}_k}$$

with: $$\lambda_{j_{k+1}\mathrm{j}_k} = \begin{cases} 1 - P_D & \text{for} \quad j_{k+1} = 0 \\ \frac{P_D}{\rho_F} \mathcal{N}(\boldsymbol{\nu}_{j_{k+1}\mathrm{j}_k}, \mathbf{S}_{j_{k+1}\mathrm{j}_k}) & \text{for} \quad j_{k+1} \neq 0 \end{cases}$$

innovation: $\boldsymbol{\nu}_{j_{k+1}\mathrm{j}_k} = \mathbf{z}_{j_{k+1}} - \mathbf{H}_{j_{k+1}} \mathbf{x}_{\mathrm{j}_{k+1|k}}$

innov. cov.: $\mathbf{S}_{j_{k+1}\mathrm{j}_k} = \mathbf{H}_{j_{k+1}} \mathbf{P}_{\mathrm{j}_{k+1|k}} \mathbf{H}_{j_{k+1}}^\top + \mathbf{R}_{j_{k+1}}$

state update: $\mathbf{x}_{\mathrm{j}_{k+1|k}} = \mathbf{F}_{j_{k+1}} \mathbf{x}_{\mathrm{j}_k} \qquad \mathbf{x}_{\mathrm{j}_k} = \mathbf{x}_{\mathrm{j}_{k|k-1}} + \mathbf{W}_{j_k \mathrm{j}_{k-1}} \boldsymbol{\nu}_{j_k, \mathrm{j}_{k-1}}$

covariances: $\mathbf{P}_{\mathrm{j}_{k+1|k}} = \mathbf{F}_{j_{k+1}} \mathbf{P}_{\mathrm{j}_k} \mathbf{F}_{j_{k+1}}^\top + \mathbf{D}_{j_{k+1}} \qquad \mathbf{P}_{\mathrm{j}_k} = \mathbf{P}_{\mathrm{j}_{k|k-1}} - \mathbf{W}_{j_k \mathrm{j}_{k-1}} \mathbf{S}_{j_k \mathrm{j}_{k-1}} \mathbf{W}_{j_k \mathrm{j}_{k-1}}^\top$

Exercise 9.1 Show that this recursion formulae for calculating the decision function is true.

Sequential Track Extraction: Discussion

- $\mathsf{LR}(k)$ is given by a growing number of summands, each related to a particular interpretation history. The tuple $\{\lambda_{\mathbf{j}_k}, \mathbf{x}_{\mathbf{j}_k}, \mathbf{P}_{\mathbf{j}_k}\}$ is called a *sub-track*.

Sequential Track Extraction: Discussion

- $\mathsf{LR}(k)$ is given by a growing number of summands, each related to a particular interpretation history. The tuple $\{\lambda_{\mathbf{j}_k}, \mathbf{x}_{\mathbf{j}_k}, \mathbf{P}_{\mathbf{j}_k}\}$ is called a *sub-track*.
- For mitigating growing memory problems all approximations discussed for track maintenance can be used if they do not significantly affect $\mathsf{LR}(k)$:
  - *individual gating:* Exclude data not likely to be associated.
  - *pruning:* Kill sub-tacks contributing marginally to the test function.
  - *local combining:* Merge similar sub tracks:

$$\{\lambda_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{P}_i\}_i \to \{\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{P}\} \qquad \text{with:} \quad \lambda = \textstyle\sum_i \lambda_i,$$

$$\mathbf{x} = \tfrac{1}{\lambda} \textstyle\sum_i \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{P} = \tfrac{1}{\lambda} \textstyle\sum_i \lambda_i [\mathbf{P}_i + (\mathbf{x}_i - \mathbf{x})(\ldots)^\top].$$

Fraunhofer FKIE

Sequential Track Extraction: Discussion

- $\mathsf{LR}(k)$ is given by a growing number of summands, each related to a particular interpretation history. The tuple $\{\lambda_{\mathbf{j}_k}, \mathbf{x}_{\mathbf{j}_k}, \mathbf{P}_{\mathbf{j}_k}\}$ is called a *sub-track*.

- For mitigating growing memory problems all approximations discussed for track maintenance can be used if they do not significantly affect $\mathsf{LR}(k)$:

  - *individual gating:* Exclude data not likely to be associated.
  - *pruning:* Kill sub-tacks contributing marginally to the test function.
  - *local combining:* Merge similar sub tracks:

$$\{\lambda_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{P}_i\}_i \rightarrow \{\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{P}\} \qquad \text{with:} \quad \lambda = \textstyle\sum_i \lambda_i,$$

$$\mathbf{x} = \tfrac{1}{\lambda} \textstyle\sum_i \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{P} = \tfrac{1}{\lambda} \textstyle\sum_i \lambda_i [\mathbf{P}_i + (\mathbf{x}_i - \mathbf{x})(\ldots)^\top].$$

- The LR test ends with a decision in favor of or against the hypotheses: h_0 (no target) or h_1 (target existing). Intuitive interpretation of the thresholds!

Fraunhofer FKIE

track extraction at t_k: Decide in favor of h_1!

initiation of pdf iteration (track maintenance):

Normalize coefficients $\lambda_{\mathbf{j}_k}$: $p_{\mathbf{j}_k} = \frac{\lambda_{\mathbf{j}_k}}{\sum_{\mathbf{j}_k} \lambda_{\mathbf{j}_k}}$!

$$\boxed{(\lambda_{\mathbf{j}_k}, \mathbf{x}_{\mathbf{j}_k}, \mathbf{P}_{\mathbf{j}_k}) \quad \to \quad p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}^k) = \sum_{\mathbf{j}_k} p_{\mathbf{j}_k}\, \mathcal{N}\big(\mathbf{x}_k;\, \mathbf{x}_{\mathbf{j}_k},\, \mathbf{P}_{\mathbf{j}_k}\big)}$$

Continue track extraction with the remaining sensor data!

sequential LR test for track monitoring:

After deciding in favor of h_1 reset $\mathrm{LR}(0) = 1$! Calculate $\mathrm{LR}(k)$ from $p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}^k)$!

track confirmation: $\mathrm{LR}(k) > \frac{P_1}{P_0}$: reset $\mathrm{LR}(0) = 1$!

track deletion: $\mathrm{LR}(k) < \frac{1-P_1}{1-P_0}$; ev. track re-initiation

Fraunhofer FKIE

DEMONSTRATION (simulated)

DEMONSTRATION (simulated)

Exercise 10.1 (voluntary)

Simulate a detection process with a given P_D, target measurements with a given $\mathbf{R}$, a detection process with a given P_D and realize the track extraction procedure.

Generalization to Target Cluster (Perfect Resolution)

Scheme directly extendable to clusters consisting of n targets, *if n is known*!

principal approach in case of *unknown* n:

1. Start with sensor measurements Z_1.
2. Assume for a target cluster $n \leq N$! A-prioriliy: $P(n) = \frac{1}{N}$
3. hypothesis h_n: there exist n targets; the data set Z_1 contains at least one target measurement; h_0: no target existing at all
4. Consider the following ratio (at least 1, at most N targets):

$$\frac{p(h_1 \vee \ldots \vee h_N|\mathcal{Z}^k)}{p(h_0|\mathcal{Z}^k)} = \frac{\sum_{n=1}^{N} p(h_n|\mathcal{Z}^k)}{p(h_0|\mathcal{Z}^k)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{p(\mathcal{Z}^k|h_n)}{p(\mathcal{Z}^k|h_0)} \frac{p(h_n)}{p(h_0)}$$

Generalization to Target Cluster (Perfect Resolution)

Scheme directly extendable to clusters consisting of n targets, *if n is known*!

principal approach in case of *unknown* n:

1. Start with sensor measurements Z_1.

2. Assume for a target cluster $n \leq N$! A-priorily: $P(n) = \frac{1}{N}$

3. hypothesis h_n: there exist n targets; the data set Z_1 contains at least one target measurement; h_0: no target existing at all

4. generalized LR test function: $\mathsf{LR}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{p(\mathcal{Z}^k|h_n)}{p(\mathcal{Z}^k|h_0)}$

5. Calculate $\mathsf{LR}_n(k) = p(\mathcal{Z}^k|h_n)/p(\mathcal{Z}^k|h_0)$ in analogy to $n = 1$.

6. 'Cardinality' of having n objects in the cluster: $c_k(n) = \frac{\mathsf{LR}_n(k)}{\sum_{n=1}^{N} \mathsf{LR}_n(k)}$

DEMONSTRATION (simulated)

ABRAHAM WALD (1902-1950) Austro-Hungarian mathematician who contributed to decision theory, geometry, and econometrics; founded the theory of economic equilibria in Oskar Morgenstern's institut in Vienna: “Berechnung der Ausschaltung von Saisonschwankungen” (Springer Verlag, 1936) the basis of Game Theory: Morgenstern, John von Neumann, John Forbes Nash (1994: Nobel price with Reinhard Selten, Bonn University) $\rightarrow$ sensor management! Founder of statistical sequential analysis in WW II. 1950 plenary talk at the International Congress of Mathematicians ICM, Cambridge (Mass.): “Basic ideas of a general theory of statistical decision rules” (1900: Hilbert's 23 Problems).

Student and friend: Jacob Wolfowitz (statistician, information theory), classical text book: “Coding Theorems of Information Theory” (1978). Posthumous attack by Ronald Fisher: “an incompetent book on statistics”, passionately defended by Jerzy Neyman as imminent a statistician as Fisher.

Fraunhofer FKIE

ABRAHAM WALD (1902-1950) Austro-Hungarian mathematician who contributed to decision theory, geometry, and econometrics; founded the theory of economic equilibria in Oskar Morgenstern's institut in Vienna: "Berechnung der Ausschaltung von Saisonschwankungen" (Springer Verlag, 1936) the basis of Game Theory: Morgenstern, John von Neumann, John Forbes Nash (1994: Nobel price with Reinhard Selten, Bonn University) $\rightarrow$ sensor management! Founder of statistical sequential analysis in WW II. 1950 plenary talk at the International Congress of Mathematicians ICM, Cambridge (Mass.): "Basic ideas of a general theory of statistical decision rules" (1900: Hilbert's 23 Problems).

Student and friend: Jacob Wolfowitz (statistician, information theory), classical text book: "Coding Theorems of Information Theory" (1978). Posthumous attack by Ronald Fisher: "an incompetent book on statistics", passionately defended by Jerzy Neyman as imminent a statistician as Fisher.

Einschub: War es eigentlich eine gute Idee, unser Wissen über Messfehler durch Gauß-Dichten zu beschreiben?

empirische Beobachtung: Messfehler sind oft Gauß-verteilt; die Gauß-Dichte ist ja auch sehr anschaulich deutbar. Gibt es aber eine tiefere Begründung?

Wer sich genauer mit den technischen Einzelheiten eines Sensors befasst, kann sich Messfehler häfig durch Überlagerung vieler kleiner zufälliger Effekte erklären.

Systematische Messfehler gibt es auch; diese sollte man jedoch und kann man in der Regel auch durch bessere Messgeräte oder durch eine Kalibrierung eliminieren.

In vielen Fällen sind die vielen, zufälligen, kleinen Resteffekte voneinander unabhängig und von gleicher Größenordnung. Man muss sich also überlegen, was man üer die "Überlagerung" von Zufallsvariablen aussagen kann.

Allerdings weiß man in der Regel nichts über einen einzelnen der vielen kleinen Fehlereffekte. D. h. man kennt seine Wahrscheinlichkeitsdichte nicht.

Fraunhofer FKIE

Wie kombiniert man Zufallsvariablen?

Einfachstes Beispiel: Addiere x_1 mit WDF $p(x_1)$ und x_2 mit WDF $p(x_2)$

Wie lautet die WDF $p(y)$ der neuen ZV: $y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$?

$$p(y) = \underbrace{\int dx_1 dx_2 \, p(y, x_1, x_2)}_{\text{Fasse } p(y) \text{ als Marginaldichte auf!}} = \int dx_1 dx_2 \, \underbrace{p(y|x_1, x_2) \, p(x_1, x_2)}_{\text{Nutze Def. der kond. WDF!}}$$

Sicheres Wissen über y, falls x_1, x_2 bekannt: $p(y|x_1, x_2) = \delta\big(y - f(x_1, x_2)\big)$!

Also: $p(y)$ berechenbar, falls die Verbunddichte $p(x_1, x_2)$ bekannt ist!

Weitere Annahme: x_1 und x_2 voneinander unabhängig!

$$p(y) = \int dx_1 dx_2 \, \delta(y - x_1 - x_2) \, p_1(x_1) \, p_2(x_2) = \int dx \, p_1(x) \, p_2(y - x)$$

Faltung der individuellen WDFs: $p(y) = p_1(x) * p_2(x)$!

Rekapitulation: Charakterisiere die Eigenschaften einer WDF!

Wie zieht man Information aus der WDF einer ZV? Integriere!

zum Beispiel: Bilde den ‘Schwerpunkt’ der WDF!

$$\mathbb{E}[x] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x\, p(x) = \bar{x}$$ „Erwartungswert“

allgemeiner: Betrachte Funktionen $g : x \mapsto g(x)$ der ZV x!

$$\mathbb{E}[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, g(x)\, p(x),$$ „Erwartungswert der *Observablen* g“

Linearität: $\mathbb{E}[\alpha g(x) + \beta f(x)] = \alpha \mathbb{E}[g(x)] + \beta \mathbb{E}[f(x)]$

Beispiele für spezielle Erwartungswerte (1/3):

- **Rekapitulation:** Wie brauchbar ist ein Erwartungswert $\bar{x} = \mathbb{E}[x]$?

Betrachte spezielle Observablen als Abstandsmaß:

$$g(x) = |x - \bar{x}| \quad \text{oder} \quad g(x) = (x - \bar{x})^2$$

quadratische Maße: rechentechnisch komfortabler!

‘erwarteter Fehler’ des Erwartungswertes $\bar{x}$:

$$\boxed{\mathbb{V}[x] = \mathbb{E}[(x - \bar{x})^2]} = \mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[x]^2$$ „Varianz“

wichtige Größe: $\boxed{\sigma_x = \sqrt{\mathbb{V}[x]}}$ „Standardabweichung“

Beispiele für spezielle Erwartungswerte (2/3):

- $g(x) = \mathrm{e}^{izx}$ Eine abstrakte Observable, vielleicht brauchbar bei ‘Faltung’!

charakteristische Funktion: $$\boxed{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{izx}] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{izx}\, p(x)}$$

$p^*(z) := \mathbb{E}[\mathrm{e}^{izx}]$ ist die Fourier-Transformation der WDF $p(x)$!

Wir rechnen ein wenig:

einerseits: $$p^*(z) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{izx}] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{izx}\, p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(izx)^n}{n!}\, p(x)$$

Wir rechnen ein wenig:

einerseits: $$p^*(z) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{izx}] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{izx}\, p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(izx)^n}{n!}\, p(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^n\, p(x)}_{n-\text{tes Moment}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!}\, m_n \qquad \diamond$$

Wir rechnen ein wenig:

einerseits: $$p^*(z) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{izx}] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{izx}\, p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(izx)^n}{n!}\, p(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^n\, p(x)}_{n-\text{tes Moment}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!}\, m_n \qquad \diamond$$

andererseits: $$\frac{d^n}{dz^n} p^*(z)\bigg|_{z=0} = \frac{d^n}{dz^n} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{izx}\, p(x)\bigg|_{z=0}$$

Wir rechnen ein wenig:

einerseits: $$p^*(z) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{izx}] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{izx}\, p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(izx)^n}{n!}\, p(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^n\, p(x)}_{n-\text{tes Moment}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!}\, m_n \qquad \diamond$$

andererseits: $$\frac{d^n}{dz^n} p^*(z)\Big|_{z=0} = \frac{d^n}{dz^n} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{izx}\, p(x)\Big|_{z=0}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{izx} (ix)^n\, p(x)\Big|_{z=0} = i^n \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^n\, p(x) = i^n\, m_n \qquad \diamond$$

Fraunhofer FKIE

Beispiele für spezielle Erwartungswerte (2/3):

- $g(x) = \mathrm{e}^{izx}$ Eine abstrakte, aber nützliche Observable!

charakteristische Funktion: $$\boxed{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{izx}] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{izx}\, p(x)}$$

$p^*(z) := \mathbb{E}[\mathrm{e}^{izx}]$ ist die Fourier-Transformation der WDF $p(x)$!

- Wer $p^*(z)$ kennt, kennt auch die WDF (Inversion)!
- Wer alle Momente einer WDF kennt, kennt die WDF!
- Wer $p^*(z)$ kennt, kennt auch alle Momente der WDF!

Beispiele für spezielle Erwartungswerte (2/3):

- $g(x) = \mathrm{e}^{izx}$ Eine abstrakte, aber nützliche Observable!

charakteristische Funktion: $$\boxed{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{izx}] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{izx}\, p(x)}$$

$p^*(z) := \mathbb{E}[\mathrm{e}^{izx}]$ ist die Fourier-Transformation der WDF $p(x)$!

- Wer $p^*(z)$ kennt, kennt auch die WDF (Inversion)!
- Wer alle Momente einer WDF kennt, kennt die WDF!
- Wer $p^*(z)$ kennt, kennt auch alle Momente der WDF!

Betrachte den Logarithmus von $p^*(z)$: $\log \mathbb{E}[\mathrm{e}^{izx}]$!

entwickle: $$\log \mathbb{E}[\mathrm{e}^{izx}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} c_n$$ c_n : „Kummulanten“

Inverse Fourier-Transformation: $p^*(\mathbf{z}) \to p(\mathbf{x})$

Fraunhofer FKIE

Exercise 7.3

Zeige für die Gauß-Dichte $p(x) = \mathcal{N}(x; \mu, \sigma)$:

$$\boxed{p^*(z) = \exp(-\tfrac{1}{2}\sigma^2 z^2 + i\mu z)}$$

Lösung durch Substitution und partielle Integration!

Bemerkung: $$\log p^*(z) = (-\tfrac{1}{2}\, z^2)\, \sigma^2 + (iz)\, \mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!}\, c_n$$

Kumulanten direkt ablesbar: $c_0 = 0, \quad c_1 = \mu = \mathbb{E}[x], \quad c_2 = \sigma^2 = \mathbb{V}[x]$

Alle höheren Kumulanten verschwinden: ein Maß für die ‘Gaußianität’!

Beispiele für spezielle Erwartungswerte (3/3):

- **Momente:** Betrachte die speziellen Observablen $g(x) = x^n$!

$$\boxed{m_n := \mathbb{E}[x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^n\, p(x)}$$

0-tes Moment: $m_0 = 1$: Normierung ($c_0 = 0$)

1-tes Moment: $m_1 = c_1 = \mathbb{E}[x]$: Erwartungswert

2-tes Moment: geht in Varianz ein: $\mathbb{V}[x] = m_2 - m_1^2 = c_2$

3-te Moment: bescheibt die ‘Schiefheit’ einer WDF

eine spezielle Kombination: arithmetisches Mittel von N ZVs

Mittel aus N voneinander unabhängige ZVs mit gleicher, unbekannter WDF $p(x)$ mit $\bar{x} = \mathbb{E}[x]$, $\sigma^2 = \mathbb{V}[x]$ (iid: independent, identically distributed):

$$\boxed{y_N = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \ldots + x_N)}$$

eine spezielle Kombination: arithmetisches Mittel von N ZVs

Mittel aus N voneinander unabhängige ZVs mit gleicher, unbekannter WDF $p(x)$ mit $\bar{x} = \mathbb{E}[x]$, $\sigma^2 = \mathbb{V}[x]$ (iid: independent, identically distributed):

$$\boxed{y_N = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \ldots + x_N)}$$

Wie lautet die WDF des Fehlers $\Delta y_N = y_N - \bar{x}$ für große N?

eine spezielle Kombination: arithmetisches Mittel von N ZVs

Mittel aus N voneinander unabhängige ZVs mit gleicher, unbekannter WDF $p(x)$ mit $\bar{x} = \mathbb{E}[x]$, $\sigma^2 = \mathbb{V}[x]$ (iid: independent, identically distributed):

$$\boxed{y_N = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \ldots + x_N)}$$

Wie lautet die WDF des Fehlers $\Delta y_N = y_N - \bar{x}$ für große N?

Betrachte die char. Funktion der WDF des Fehlers Δy_N!

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{iz\Delta y_N}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iz(\frac{1}{N}[x_1+\ldots+x_N]-\bar{x})}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iz(x_1+\ldots+x_N-N\bar{x})/N}]$$

eine spezielle Kombination: arithmetisches Mittel von N ZVs

Mittel aus N voneinander unabhängige ZVs mit gleicher, unbekannter WDF $p(x)$ mit $\bar{x} = \mathbb{E}[x]$, $\sigma^2 = \mathbb{V}[x]$ (iid: independent, identically distributed):

$$\boxed{y_N = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \ldots + x_N)}$$

Wie lautet die WDF des Fehlers $\Delta y_N = y_N - \bar{x}$ für große N?

Betrachte die char. Funktion der WDF des Fehlers Δy_N!

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{iz\Delta y_N}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iz(\frac{1}{N}[x_1+\ldots+x_N]-\bar{x})}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iz(x_1+\ldots+x_N-N\bar{x})/N}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iz([x_1-\bar{x}]+\ldots+[x_N-\bar{x}])/N}]$$

eine spezielle Kombination: arithmetisches Mittel von N ZVs

Mittel aus N voneinander unabhängige ZVs mit gleicher, unbekannter WDF $p(x)$ mit $\bar{x} = \mathbb{E}[x]$, $\sigma^2 = \mathbb{V}[x]$ (iid: independent, identically distributed):

$$\boxed{y_N = \tfrac{1}{N}(x_1 + x_2 + \ldots + x_N)}$$

Wie lautet die WDF des Fehlers $\Delta y_N = y_N - \bar{x}$ für große N?

Betrachte die char. Funktion der WDF des Fehlers Δy_N!

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{iz\Delta y_N}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iz(x_1+\ldots+x_N-N\bar{x})/N}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iz([x_1-\bar{x}]+\ldots+[x_N-\bar{x}])/N}]$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{iz(x-\bar{x})/N}]^N}_{\text{unabh. ZVs!}} = \underbrace{\mathbb{E}[1 + \frac{iz}{N}(x-\bar{x}) - \frac{z^2}{2N^2}(x-\bar{x})^2 + \mathcal{O}(\frac{z^3}{N^3})]^N}_{\text{Taylor-Entw. (‘großes' } N\text{)!}}$$

eine spezielle Kombination: arithmetisches Mittel von N ZVs

Mittel aus N voneinander unabhängige ZVs mit gleicher, unbekannter WDF $p(x)$ mit $\bar{x} = \mathbb{E}[x]$, $\sigma^2 = \mathbb{V}[x]$ (iid: independent, identically distributed):

$$\boxed{y_N = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \ldots + x_N)}$$

Wie lautet die WDF des Fehlers $\Delta y_N = y_N - \bar{x}$ für große N?

Betrachte die char. Funktion der WDF des Fehlers Δy_N!

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{iz\Delta y_N}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iz(x_1+\ldots+x_N-N\bar{x})/N}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iz([x_1-\bar{x}]+\ldots+[x_N-\bar{x}])/N}]$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{iz(x-\bar{x})/N}]^N}_{\text{unabh. ZVs!}} = \underbrace{\mathbb{E}[1 + \frac{iz}{N}(x-\bar{x}) - \frac{z^2}{2N^2}(x-\bar{x})^2 + \mathcal{O}(\frac{z^3}{N^3})]^N}_{\text{Taylor-Entw. ('großes' } N\text{)!}}$$

$$= \Big[\underbrace{\mathbb{E}[1] + \frac{iz}{N}(\mathbb{E}[x]-\bar{x}) - \frac{z^2}{2N^2}\mathbb{E}[(x-\bar{x})^2] + \mathcal{O}(\frac{z^3}{N^3})}_{\mathbb{E}\text{: lineare Operation!}}\Big]^N$$

eine spezielle Kombination: arithmetisches Mittel von N ZVs

Mittel aus N voneinander unabhängige ZVs mit gleicher, unbekannter WDF $p(x)$ mit $\bar{x} = \mathbb{E}[x]$, $\sigma^2 = \mathbb{V}[x]$ (iid: independent, identically distributed):

$$\boxed{y_N = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \ldots + x_N)}$$

Wie lautet die WDF des Fehlers $\Delta y_N = y_N - \bar{x}$ für große N?

Betrachte die char. Funktion der WDF des Fehlers Δy_N!

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{iz\Delta y_N}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iz(x_1+\ldots+x_N-N\bar{x})/N}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iz([x_1-\bar{x}]+\ldots+[x_N-\bar{x}])/N}]$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{iz(x-\bar{x})/N}]^N}_{\text{unabh. ZVs!}} = \underbrace{\mathbb{E}[1 + \frac{iz}{N}(x-\bar{x}) - \frac{z^2}{2N^2}(x-\bar{x})^2 + \mathcal{O}(\frac{z^3}{N^3})]^N}_{\text{Taylor-Entw. ('großes' } N\text{)!}}$$

$$= \Big[\underbrace{\mathbb{E}[1] + \frac{iz}{N}(\mathbb{E}[x] - \bar{x}) - \frac{z^2}{2N^2}\mathbb{E}[(x-\bar{x})^2] + \mathcal{O}(\frac{z^3}{N^3})}_{\mathbb{E}\text{: lineare Operation!}}\Big]^N = \Big[1 - \tfrac{z^2\sigma^2}{2N^2} + \mathcal{O}(\tfrac{z^3}{N^3})\Big]^N$$

Fraunhofer FKIE

eine spezielle Kombination: arithmetisches Mittel von N ZVs

Mittel aus N voneinander unabhängige ZVs mit gleicher, unbekannter WDF $p(x)$ mit $\bar{x} = \mathbb{E}[x]$, $\sigma^2 = \mathbb{V}[x]$ (iid: independent, identically distributed):

$$\boxed{y_N = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \ldots + x_N)}$$

Wie lautet die WDF des Fehlers $\Delta y_N = y_N - \bar{x}$ für große N?

Betrachte die char. Funktion der WDF des Fehlers Δy_N!

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{iz\Delta y_N}] = \left[1 - \tfrac{z^2\sigma^2}{2N^2} + \mathcal{O}(\tfrac{z^3}{N^3})\right]^N \approx \exp(-\tfrac{1}{2}\tfrac{\sigma^2}{N}z^2) \quad \text{wegen:} \quad \boxed{\lim_{N\to\infty}(1 - \tfrac{x}{N})^N = \mathrm{e}^{-x}}$$

Fraunhofer FKIE

eine spezielle Kombination: arithmetisches Mittel von N ZVs

Mittel aus N voneinander unabhängige ZVs mit gleicher, unbekannter WDF $p(x)$ mit $\bar{x} = \mathbb{E}[x]$, $\sigma^2 = \mathbb{V}[x]$ (iid: independent, identically distributed):

$$\boxed{y_N = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \ldots + x_N)}$$

Wie lautet die WDF des Fehlers $\Delta y_N = y_N - \bar{x}$ für große N?

Betrachte die char. Funktion der WDF des Fehlers Δy_N!

$$\mathbb{E}[e^{iz\Delta y_N}] = \left[1 - \tfrac{z^2\sigma^2}{2N^2} + \mathcal{O}(\tfrac{z^3}{N^3})\right]^N \approx \exp(-\tfrac{1}{2}\tfrac{\sigma^2}{N}z^2) \quad \text{wegen:} \quad \boxed{\lim_{N\to\infty}(1 - \tfrac{x}{N})^N = e^{-x}}$$

$$\boxed{e^{-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{N}z^2} \text{ ist die char. Funktion einer Gauß-WDF mit } \mathbb{E}[x] = 0,\ \mathbb{V}[x] = \frac{\sigma^2}{N}!}$$

Die WDF von $y_N = \Delta y_N + \bar{x}$ ist demnach $p(y_N) = \mathcal{N}\left(y_N;\, \bar{x},\, \sigma^2/N\right)$

Die Details der WDF der ZV x sind offenbar unerheblich für große N!

Fazit:

- Ein unbekannter Erwartungswert $\bar{x}$ einer WDF $p(x)$ kann durch Mittelung von 'Messungen' y_N 'geschätzt' werden!

- Der 'Schätzer', i.e. die Fkt. $\widehat{x}_N(x_1, \ldots, x_N) = y_N$, konvergiert gegen den Erwartungswert für $N \to \infty$! ($\widehat{x}_N$ ist 'biasfrei')

- Die WDF des Schätzfehlers ist für große N eine Gauß-Dichte mit der Standardabweichung $\sigma_{\widehat{x}_N} = \sigma_x/\sqrt{N}$ (unabh. von $p(x)$!

- Die Qualität der Schätzung wächst also mit N propotional zu $1/\sqrt{N}$!

Diese Beobachtung bildet die Grundlage der ganzen Statistik! (na ja, fast...)

Wichtige Beobachtung:

Offenbar kann man aus Realizierungen $x_1, x_2, \ldots, x_N$ einer Zufallsvariablen x Aussagen über die Parameter (Erwartungswerte) der zugrundeliegenden WDF $p(x)$ schätzen!

$\rightarrow$ 'Integration' auch durch Analyse von Zufallsvariablen!

wird noch wichtig $\rightarrow$ "Particle Filterung"!